

الأدهم

في

الهندسة التحليلية

الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

اسم الطالب /

المدرســـة /

الفصـــل /

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول
الكميات القياسية - الكميات المتجهة

ملاحظات هامة

١ الكمية القياسية

هي كميات تتعين بمعلومية مقدارها فقط ولا تحتاج إلى اتجاه

[المسافة - الكتلة - الزمن ...]

٢ الكميات المتجهة

هي كميات تحتاج إلى مقدار واتجاه.

[الإزاحة - القوة - السرعة ...]

٣ المسافة

طول المسار الفعلي المقطوع وليس لها اتجاه [قياسية]

٤ الإزاحة

هي مسافة في اتجاه معين من البداية إلى النهاية [متجهة]

٥ القطعة المستقيمة الموجهة

لها ① بداية ② نهاية ③ اتجاه

٦ معيار القطعة المستقيمة الموجهة

‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖

هو طولها ‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖ = ‖$\overrightarrow{\text{ب أ}}$‖ = أب

٧ تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

إذا كان لهما

① نفس المقدار [المعيار]

② نفس الاتجاه.

متوازيان أو يحملهما مستقيم واحد

٨ الشكل أ ب جـ د إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ فإن الشكل متوازي أضلاع

[فيه ضلعان متقابلان متساويان ومتوازيان]

مثال ١

إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع فأكمل

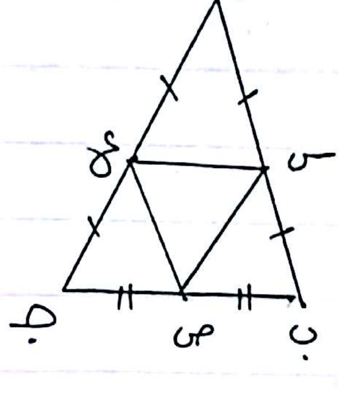
$\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ أو $-\overrightarrow{\text{جـد}}$

$\overrightarrow{\text{أد}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ أو ...

$\overrightarrow{\text{دأ}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جـب}}$ أو ...

$\overrightarrow{\text{أم}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{مجـ}}$ أو ...

مثال ٢



في الشكل المقابل أوجد القطع التي تكافئ كل مما يأتي

١) $\overrightarrow{ب س}$ ٢) $\overrightarrow{أ ع}$

٣) $\overrightarrow{س ع}$ ٤) $\overrightarrow{جـ ص}$

٥) $\overrightarrow{س ص}$ ٦) $\overrightarrow{ع ص}$

ضع علامة (✓) أو (✗)

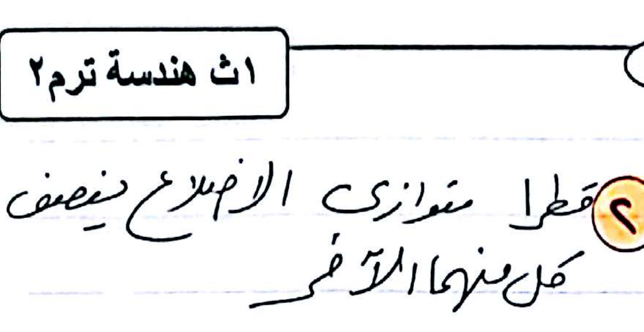
١) $\| \overrightarrow{س ص} \| = \| \overrightarrow{ع ص} \|$

٢) $\overrightarrow{س ص}$ تكافئ $\overrightarrow{جـ ص}$

٣) $\overrightarrow{ب ص}$ تكافئ $\overrightarrow{ع س}$

ملحوظة

١) القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طوله



٢) قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

مثال ٣

في مستوى احداثي متعامد إذا كانت أ(٢، ٣)، ب(-٣، ١)، جـ(٥، -١)

المطلوب

١) ارسم $\overrightarrow{جـ د}$ تكافئ $\overrightarrow{أ ب}$ وعيّن د

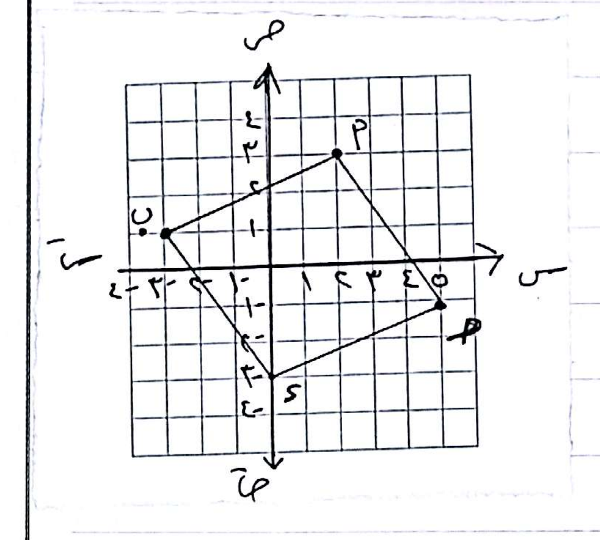
٢) عيّن إحداثي م منتصف $\overline{ب جـ}$ ثم حدد القطع الموجهة التي تكافئ

٣) $\overrightarrow{ب م}$ ٤) $\overrightarrow{أ م}$

٥) $\overrightarrow{أ جـ}$ ٦) $\overrightarrow{د ب}$

٧) هل الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع؟ طيب ليه؟


الحل



الدرس الثاني
المتجهات

ملاحظات هامة

١) متجه الموضع للنقطة (أ)

هو متجه مستقيم موجه بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة أ

ملحوظة: $\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{وب} = \overrightarrow{ب}$

٢) ازاي تجيب معيار المتجه $\|\overrightarrow{أ}\|$

$= \sqrt{س^2 + ص^2}$ وحدة طول

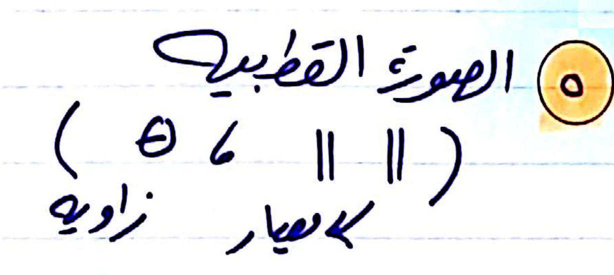
٣) متجه الوحدة

هو متجه معياره الواحد الصحيح

٤) ازاي تعمل من أي متجه متجه وحدة في اتجاهه

$أ^* = \dfrac{\overrightarrow{أ}}{\|أ\|}$

متجه الوحدة في اتجاه أ — المتجه ÷ معياره — تقسمه على معياره



٥) الصورة القطبية

$(\|أ\| ، \theta)$

معيار ، زاوية

الصورة الإحداثية

(س ، ص)

أولاً: التحويل من القطبية للإحداثية

س = المعيار × جتا الزاوية

ص = المعيار × جا الزاوية

مثال: حول إلى الصورة الإحداثية كلاً من

١) $\overrightarrow{وأ} = (١٠\sqrt{٣} ، ٦٠°)$

س = $١٠\sqrt{٣}$ جتا ٦٠° = $٥\sqrt{٣}$

ص = $١٠\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = ١٥

∴ أ = $(٥\sqrt{٣} ، ١٥)$

٢) $\overrightarrow{وب} = (٤\sqrt{٢} ، ١٣٥°)$

س = $٤\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° = −٤

ص = $٤\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° = ٤

ب = (−٤ ، ٤)

$و\bar{م} = (٨ ، \frac{٤ط}{٣})$

$ط = ١٨٠°$

$و\bar{م} (٨ ، ٢٤٠°)$

$س = ٨ جتا ٢٤٠° = -٤$

$ص = ٨ جا ٢٤٠° = -٤\sqrt{٣}$

$\therefore م = (-٤ ، -٤\sqrt{٣})$

ثانياً التحويل من الصورة الإحداثية الى الصورة القطبية

نحتاج معيار وزاوية

$||م|| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$ظا\theta = \frac{ص}{س}$ ← shift tan $\frac{ص}{س}$ بدون إشارة

وبعدين نحطها في الربع اللي يتوافق مع إشارة س، ص

الثاني	الأول
$١٨٠ - \theta$	θ
$(س^- ، ص^+)$	$(س^+ ، ص^+)$
الثالث	**الرابع**
$١٨٠ + \theta$	$(٣٦٠ - \theta)$
$(س^- ، ص^-)$	$(س^+ ، ص^-)$

(محور س: $س^+$ ، $س^-$ ؛ محور ص: $ص^+$ ، $ص^-$)

مثال

حول إلى الصورة القطبية

١) $و\bar{م} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$

$س = ٤$ ، $ص = ٤\sqrt{٣}$

$||م|| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$= \sqrt{(٤)^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢} = ٨$ وحدة طول

$ظا\theta = \frac{ص}{س} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$

$\therefore \theta = ٦٠°$ في الربع الأول

لأن س، ص موجبين

$\therefore \bar{م} = (٨ ، ٦٠°)$

٢) $و\bar{ن} (٨ ، -٨)$

حل أنت

٣) $و\bar{م} = (-٥\sqrt{٣} ، -٥)$

$||م|| = \sqrt{(-٥\sqrt{٣})^٢ + (-٥)^٢} = ١٠$ وحدة طول

$ظا\theta = \frac{ص}{س}$ بدون إشارة

$ظا\theta = \frac{٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \theta = ٣٠°$ بس في الربع الثالث

لأن $س^-$ ، $ص^-$

$\therefore \theta = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°$

$\bar{م} = (١٠ ، ٢١٠°)$

و أ→ = (-٤، ٤)

حل انت



 الانغلاق

٢ الابدال

أ→ + ب→ = ب→ + أ→

٣ الدمج

أ→ + (ب→ + جـ→) = (أ→ + ب→) + جـ→

٤ المحايد الجمعي و→ (٠، ٠)

أ→ + و→ = و→ + أ→ = أ→

٥ المعكوس الجمعي

أ→ + (-أ→) = و→

٦ إذا كان أ→ + ب→ = أ→ + جـ→ فإن ب→ = جـ→

مثال ٣

إذا كان أ→ = (٢، ١) ، ب→ = (٣، -٢) ، جـ→ = (-٤، ٥) فأوجد

١) ٢أ→ - ب→ + جـ→

= ٢(٢، ١) - (٣، -٢) + (-٤، ٥)

= (٤، ٢) + (-٣، ٢) + (-٤، ٥)

= (-٣، ٩)

٢) ٢ب→ - ٣جـ→ + أ→ الحل انت

مثال ٤

إذا كان أ→ = (٦، ١) ، ب→ = (١، ٢) فأوجد ||أ→ - ٢ب→||

الحل

نجيب أ→ - ٢ب→ الأول وبعديه نجيب المعيار

أ→ - ٢ب→ = (٦، ١) - ٢(١، ٢)

= (٤، -٣)

||أ→ - ٢ب→|| = √((٤)² + (-٣)²) = ٥ وحدة طول

مثال ٥

إذا كان $\vec{أ} = (-3 ، 4)$ ، $\vec{ب} = (2 ، 1)$ ، $\vec{ح} = \vec{أ} + 2\vec{ب}$ فأوجد $\|\vec{ح}\|$

إزاي تكتب متجه $\vec{ح}$ بدلالة متجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

هنفضل يبقى $\vec{ح}$ = ثابت (ك) × $\vec{أ}$ + ثابت آخر (ل) × $\vec{ب}$

ونعمل معادلتين ونحلهم

مثال ٦

إذا كانت $\vec{أ} = (2 ، -3)$ ، $\vec{ب} = (3 ، 5)$ عبر عن $\vec{ح} = (12 ، 1)$ بدلالة $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

الحل

نفرض أن $\vec{ح} = ك\vec{أ} + ل\vec{ب}$

$\therefore ك(2 ، -3) + ل(3 ، 5) = (12 ، 1)$

$\therefore 2ك + 3ل = 12 \leftarrow ①$

$-3ك + 5ل = 1 \leftarrow ②$

هنضرب الأولى في معامل الثانية والثانية × معامل الأولى

ك

بضرب المعادلة ① × ٣ والمعادلة ② × ٢ والجمع

$6ك + 9ل = 36 \leftarrow ①$

$-6ك + 10ل = 2 \leftarrow ②$

$19ل = 38$

$\therefore ل = \frac{38}{19} = 2$

بالتعويض في الأولى

$2ك + 3 \times 2 = 12$

$2ك = 12 - 6$

$2ك = 6 \quad \therefore ك = 3$

$\therefore \vec{ح} = 3\vec{أ} + 2\vec{ب}$

متجها الوحدة الأساسيان

$\vec{س} = (1 ، 0)$ متجه الوحدة واتجاهه هو اتجاه الموجب لمحور السينات

$\vec{ص} = (0 ، 1)$ متجه الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات

الحل $\overrightarrow{م} = (٢ ، ٣) = ٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ن} = (٥ ، ٤) = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ك} (١ ، -١) = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ل} = ٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص} = (٢ ، -٣)$

مثال ٧ اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والاحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجه الوحدة الاساسيه :

١) $\overrightarrow{م} = (-٨ ، ٦)$

الحل

$\overrightarrow{م} = -٨ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$

الاحداثيه $\overrightarrow{م} = (-٨ ، ٦)$

لـ القطبيه

$\| \overrightarrow{م} \| = \sqrt{(-٨)^٢ + (٦)^٢} = ١٠$ وحدة طول

$ظا \theta = \frac{ص}{س}$ $ظا \theta = \frac{٦}{٨}$ بدون اشارة

$\theta = ١١ ْ ٥٢ َ ٣٦ ً$

بس فى الربع الثانى س- ص+

$\therefore \theta = ١٨٠ - \square = ١٤٣ ْ ٧ َ ٤٨ ً$

$\therefore \overrightarrow{م} = (١٠ ، ١٤٣ ْ ٧ َ ٤٨ ً)$

٢) قوة مقدارها ٤ نيوتن تؤثر فى إتجاه ٣٠° شرق الجنوب

الحل

شمال
جنوب
شرق
غرب
٣٠°
$\overrightarrow{م}$

بص يا سيدى شرق الجنوب يعنى تقف فى الجنوب باتجاه الشرق يبقى كدة الزاويه ٣٠٠° مع الاتجاه الموجب للسينات

قطبيه ↙ $\overrightarrow{م} = (٤ ، ٣٠٠ ْ)$

الاحداثيه ↙

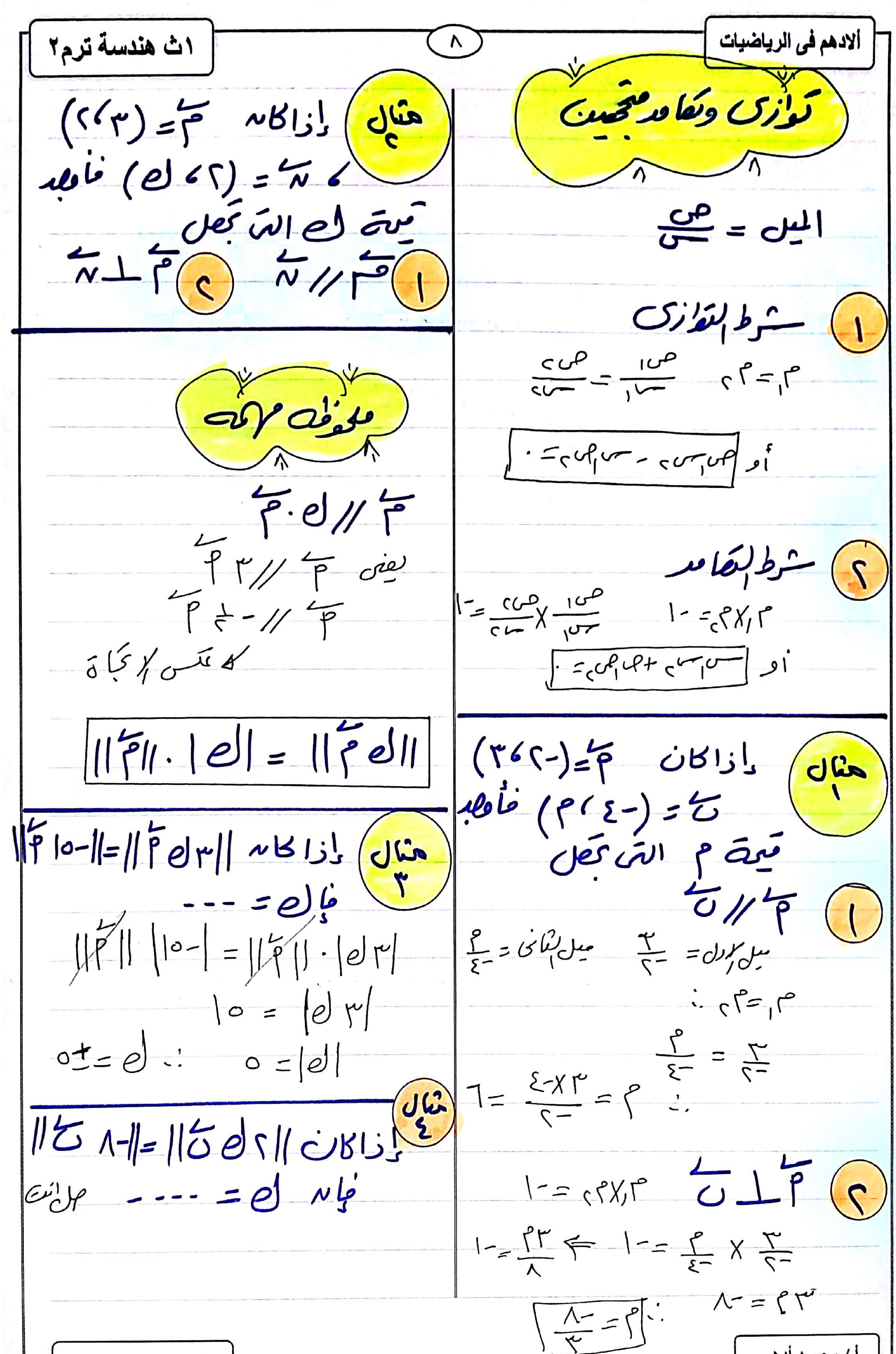
$س = ٤ جتا ٣٠٠ ْ = ٢$

$ص = ٤ حا ٣٠٠ ْ = -٢ \sqrt{٣}$

$\overrightarrow{م} = (٢ ، -٢\sqrt{٣})$

بدلالة متجه الوحدة

$\overrightarrow{م} = ٢ \overrightarrow{س} - ٢\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$



توازى وتعامد مستقيمين

الميل = $\frac{ص}{س}$

① شرط التوازى

$م_1 = م_2$ ، $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

أو $ص_1 س_2 - س_1 ص_2 = 0$

② شرط التعامد

$م_1 \times م_2 = -1$ ، $\frac{ص_1}{س_1} \times \frac{ص_2}{س_2} = -1$

أو $س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = 0$

مثال ١

إذا كان $\vec{أ} = (-2 ، 3)$ ، $\vec{ب} = (-4 ، م)$ فأوجد قيمة م التى تجعل

① $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$

ميل الأول = $\frac{3}{-2}$ ، ميل الثانى = $\frac{م}{-4}$

∴ $م_1 = م_2$

$\frac{3}{-2} = \frac{م}{-4}$

∴ $م = \frac{3 \times -4}{-2} = 6$

② $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، $م_1 \times م_2 = -1$

$\frac{3}{-2} \times \frac{م}{-4} = -1 \Leftarrow \frac{3م}{8} = -1$

$3م = -8$ ∴ $م = \frac{-8}{3}$

مثال

إذا كان $\vec{م} = (3 ، 2)$ ، $\vec{ن} = (2 ، ك)$ فأوجد قيمة ك التى تجعل

① $\vec{م} \parallel \vec{ن}$ ② $\vec{م} \perp \vec{ن}$

ملحوظة مهمة

$\vec{م} \parallel ك \cdot \vec{م}$

يعنى $\vec{م} \parallel 3\vec{م}$

$\vec{م} \parallel -\frac{1}{2}\vec{م}$

ك عكس الاتجاه

$\|ك\vec{م}\| = |ك| \cdot \|\vec{م}\|$

مثال ٣

إذا كان $\|3ك\vec{م}\| = \|-15\vec{م}\|$ فإن ك = ...

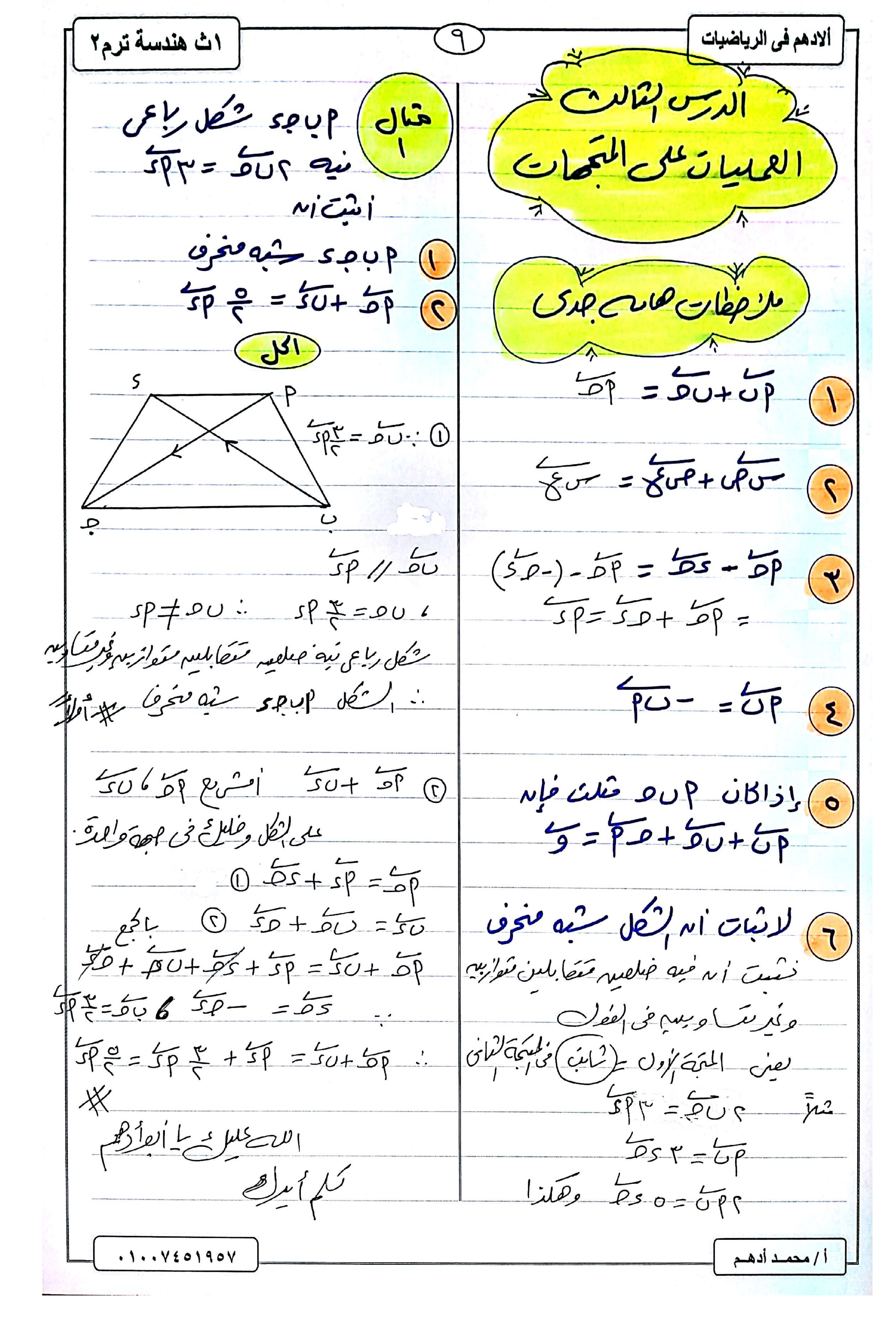
$|3ك| \cdot \|\vec{م}\| = |-15| \cdot \|\vec{م}\|$

$|3ك| = 15$

$|ك| = 5$ ∴ $ك = \pm 5$

مثال ٤

إذا كان $\|2ك\vec{ب}\| = \|-8\vec{ب}\|$ فإن ك = ... حل أنت



الدرس الثالث العمليات على المتجهات

ملاحظات هامة جداً

١) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

٢) $\overrightarrow{\text{س ص}} + \overrightarrow{\text{ص ع}} = \overrightarrow{\text{س ع}}$

٣) $\overrightarrow{\text{أ جـ}} - \overrightarrow{\text{د جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} + (-\overrightarrow{\text{د جـ}})$

$= \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$

٤) $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}}$

٥) إذا كان أ ب جـ مثلث فإن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ أ}} = \overrightarrow{0}$

٦) لإثبات أن الشكل شبه منحرف

نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيين وغير متساويين فى الطول

يعنى المتجه الأول = ثابت فى المتجه الثانى

مثلاً: $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} = ٣\,\overrightarrow{\text{د جـ}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} = ٥\,\overrightarrow{\text{د جـ}}$ وهكذا

مثال ١

أ ب جـ د شكل رباعى فيه $٢\,\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

أثبت أن

١) أ ب جـ د شبه منحرف

٢) $\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب د}} = \frac{٥}{٢}\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

الحل

١) $\because \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب جـ}} \parallel \overrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\text{ب جـ} = \frac{٣}{٢}\,\text{أ د}$ $\therefore \text{ب جـ} \neq \text{أ د}$

شكل رباعى فيه ضلعين متقابلين متوازيين وغير متساويين

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف # أموره

٢) $\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب د}}$ أشرح $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب د}}$ على الشكل وخليهم فى اتجاه واحد.

$\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ د}} + \overrightarrow{\text{د جـ}}$ (١)

$\overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ د}}$ (٢) بالجمع

$\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{أ د}} + \overrightarrow{\text{د جـ}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ د}}$

$\because \overrightarrow{\text{د جـ}} = -\overrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{أ د}} + \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أ د}} = \frac{٥}{٢}\,\overrightarrow{\text{أ د}}$

#

الله عليك يا أبو أدهم

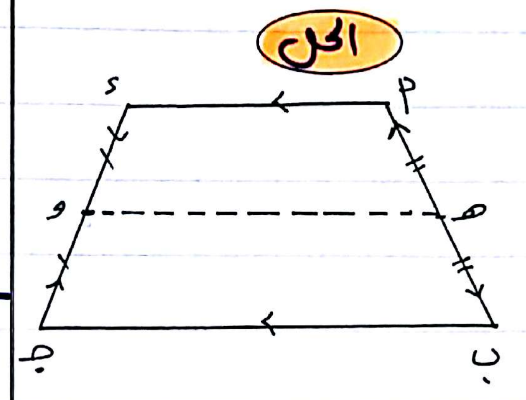
تسلم إيدك

مثال ٢

أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{دجـ}}$

أثبت أن $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = 2\overrightarrow{\text{هـو}}$

الحل



بص ياسيدي هنجيب $\overrightarrow{\text{هـو}}$ بطريقتين
مرة من الجزء الأعلى ومرة من اللي تحت
عارف هنروح فين أكتب
من الأصل

$\overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{دو}} = \overrightarrow{\text{هـو}}$ ← ①

$\overrightarrow{\text{هـب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـو}} = \overrightarrow{\text{هـو}}$ ← بالجمع

∵ $\overrightarrow{\text{هـأ}} = -\overrightarrow{\text{هـب}}$ ، $\overrightarrow{\text{دو}} = -\overrightarrow{\text{جـو}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = 2\overrightarrow{\text{هـو}}$ #

مثال ٣

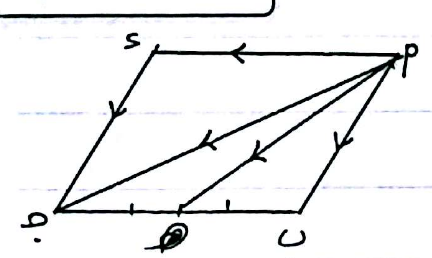
أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ اثبت أنه

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = 2\overrightarrow{\text{أهـ}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{دجـ}}$ من خواص المتوازي



∵ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{أب}}$

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

∴ في $\triangle$ أبجـ : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = 2\overrightarrow{\text{أهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = 2\overrightarrow{\text{أهـ}}$



١ في $\triangle$ أبجـ إذا كان $\overline{\text{أد}}$ متوسط فإن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = 2\overrightarrow{\text{أد}}$

٢ أو في $\triangle$ أبجـ إذا كان د منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = 2\overrightarrow{\text{أد}}$

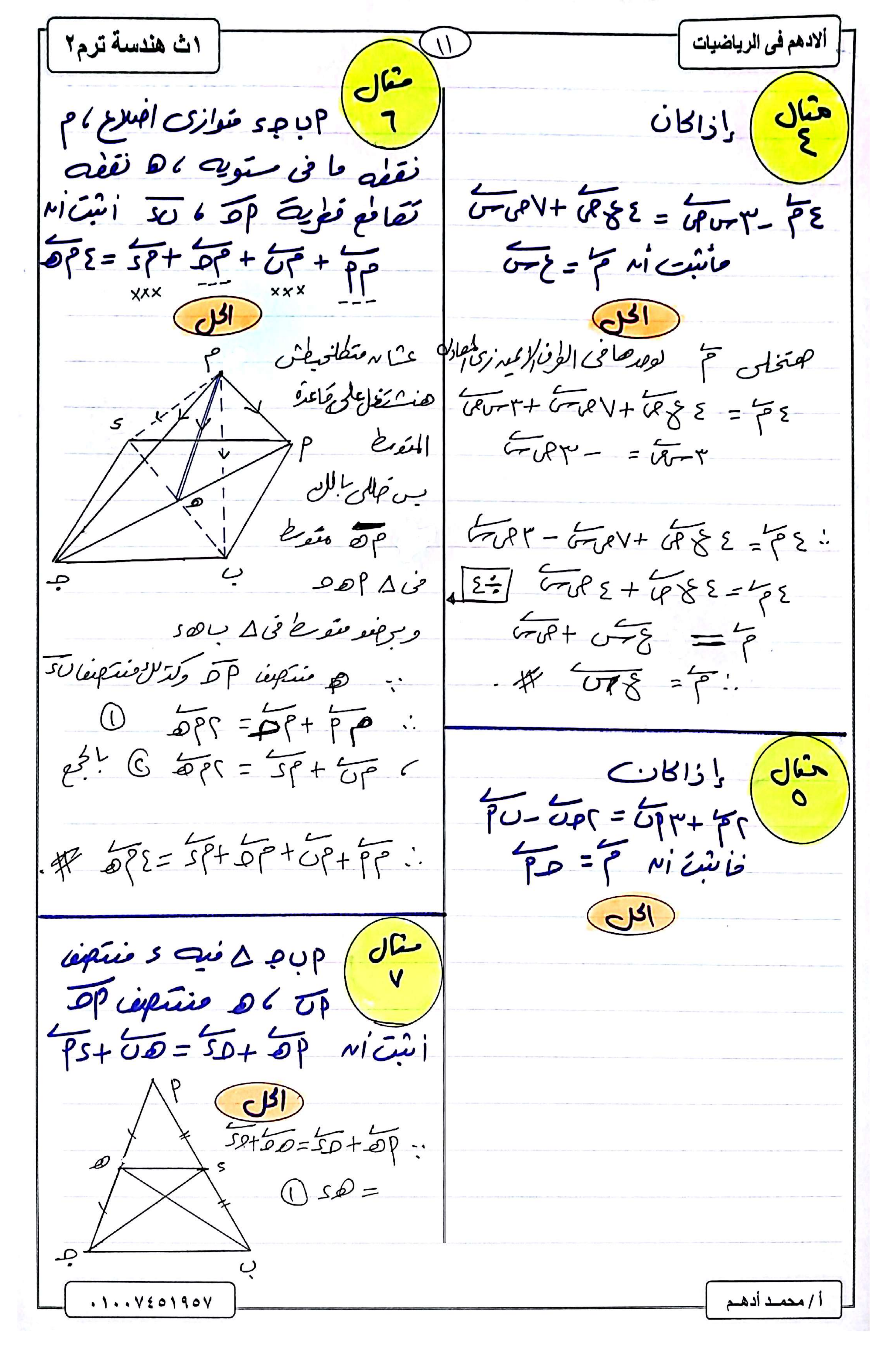
٣ طرح متجهين

$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

$\overrightarrow{\text{لم}} - \overrightarrow{\text{لن}} = \overrightarrow{\text{نم}}$ وهكذا

٤ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

٥ $\overrightarrow{\text{لم}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ل}}$



مثال ٤

إذا كان

$٤\overrightarrow{\text{م}} - ٣\,\overrightarrow{\text{س ص}} = ٤\,\overrightarrow{\text{ع ص}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ص س}}$

فأثبت أن $\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{ع س}}$

الحل

هنخلي $\overrightarrow{\text{م}}$ لوحدها في الطرف الأيمن زي المعادلة

$٤\overrightarrow{\text{م}} = ٤\,\overrightarrow{\text{ع ص}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ص س}} + ٣\,\overrightarrow{\text{س ص}}$

$٣\,\overrightarrow{\text{س ص}} = -٣\,\overrightarrow{\text{ص س}}$

$\therefore ٤\overrightarrow{\text{م}} = ٤\,\overrightarrow{\text{ع ص}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ص س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص س}}$

$٤\overrightarrow{\text{م}} = ٤\,\overrightarrow{\text{ع ص}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص س}}$ ← ÷٤

$\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{ع ص}} + \overrightarrow{\text{ص س}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{ع س}}$ #

مثال ٥

إذا كان

$٢\,\overrightarrow{\text{م أ}} + ٣\,\overrightarrow{\text{أ ب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ جـ}} - \overrightarrow{\text{ب أ}}$

فأثبت أن $\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}}$

الحل

مثال ٦

أ ب جـ د متوازي أضلاع، م نقطة ما في مستويه، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ب د}}$ أثبت أن

$\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٤\,\overrightarrow{\text{م هـ}}$

الحل

عشان منتلخبطش هنشتغل على قاعدة المتوسط

بس خلي بالك

$\overline{\text{م هـ}}$ متوسط في $\triangle$ أ م جـ

وبرضو متوسط في $\triangle$ ب م د

$\because$ هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ وكذلك منتصف $\overline{\text{ب د}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ①

، $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٢\,\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ② بالجمع

$\therefore \overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٤\,\overrightarrow{\text{م هـ}}$ #

مثال ٧

أ ب جـ $\triangle$ فيه د منتصف $\overline{\text{أب}}$، هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

أثبت أن $\overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ د}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{د أ}}$

الحل

$\because \overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ د}} = \overrightarrow{\text{هـ هـ}} + \overrightarrow{\text{د أ}}$

$\overrightarrow{\text{هـ د}} =$ ①

∵ $\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{هـء}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴

$\overrightarrow{مهـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بء}$ #

مثال ٨

م ب جـ ء ▱ فيه
م = (٣، ٠) ، ب = (٠، ٤)
جـ = (-٢، -١) أوجد إحداثي ء

الحل

∵ م ب جـ ء متوازى أضلاع
∴ $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{مء}$
$\overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{م}$
∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{م} + \overrightarrow{ب}$
جـ = (-٢، -١) - (٣، ٠) + (٠، ٤)
= (-٥، ٣)

مثال ٩

م ب جـ ء شبه منحرف فيه
م = (-٢، -٣) ، ب = (٤، -١)
جـ = (٢، ٥) ، ء = (-١، ك)

الحل

١ أوجد قيمة ك إذا كان $\overrightarrow{مب} // \overrightarrow{ءجـ}$

$\overrightarrow{مب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{م}$
= (٤، -١) - (-٢، -٣) = (٦، ٢)
، $\overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ء}$
= (٢، ٥) - (-١، ك) = (٣، ٥-ك)
∵ $\overrightarrow{مب} // \overrightarrow{ءجـ}$
ميل $\overrightarrow{مب}$ = ميل $\overrightarrow{ءجـ}$
$\frac{٢}{٦} = \frac{٥-ك}{٣}$
٦(٥-ك) = ٦
٥-ك = ١ ، -ك = ١-٥
-ك = -٤ ∴ ك = ٤

٢ اثبت أن $\overrightarrow{جـب} \perp \overrightarrow{مب}$

الحل

$\overrightarrow{جـب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ} = (٤-٢، -١-٥) = (٢، -٦)$
ميل $\overrightarrow{جـب} = \frac{-٦}{٢} = -٣$
∵ ميل $\overrightarrow{مب} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$
∵ ميل م١ × م٢ = -٣ × $\frac{١}{٣}$ = -١
∴ $\overrightarrow{جـب} \perp \overrightarrow{مب}$ #

٣ أوجد مساحة شبه المنحرف م ب جـ ء

الحل

$\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

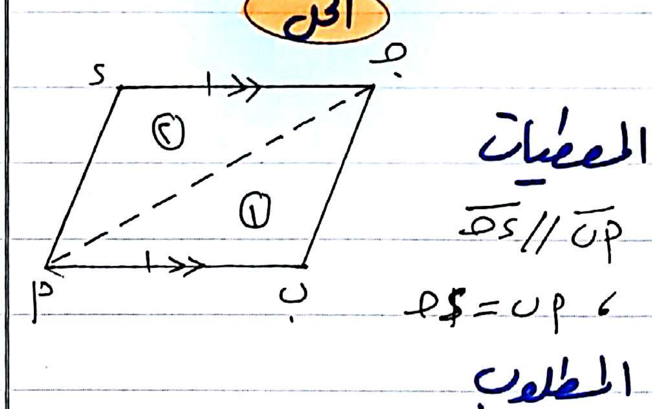
$\|\overrightarrow{مب}\| = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول
$\|\overrightarrow{ءجـ}\| = \sqrt{٣^٢ + ١^٢} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول
$\|\overrightarrow{جـب}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٦)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول
∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × [‖$\overrightarrow{مب}$‖ + ‖$\overrightarrow{ءجـ}$‖] × ‖$\overrightarrow{جـب}$‖
= $\frac{١}{٢}$ [٢√١٠ + √١٠] × ٢√١٠ = ٣٠ وحدة مربعة

الدرس الرابع
تطبيقات على المتجهات

مثال ١

باستخدام المتجهات اثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعان الآخران يكونان متساويان ومتوازيان ويكون الشكل متوازى أضلاع

الحل



المعطيات

$\overline{أب} // \overline{دج}$ ، أب = دج

المطلوب

$\overline{بج} // \overline{أد}$ ، بج = أد

الحل ارسم $\overline{أج}$

البرهان

∵ أب = دج ، $\overline{أب} // \overline{دج}$

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دج}$

فى △ أبج $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$ (١)

فى △ أدج $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دج}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دج}$

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دج}$

∴ $\overrightarrow{بج} = \overrightarrow{أد}$

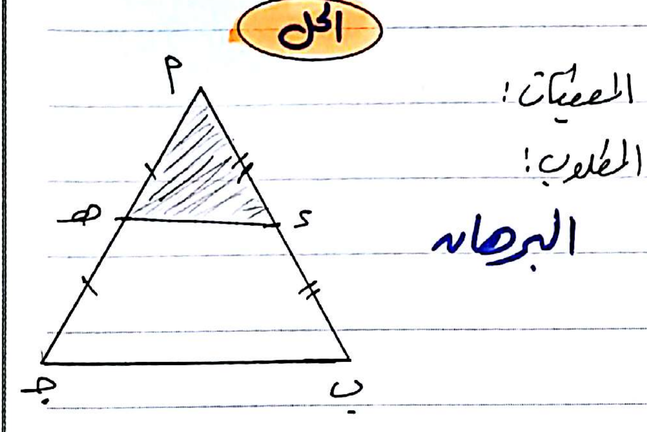
∴ $\overline{بج} // \overline{أد}$ ، بج = أد

∴ الشكل أبجد متوازى أضلاع

مثال ٢

باستخدام المتجهات اثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها = $\frac{1}{2}$ طوله

الحل



المعطيات:

المطلوب:

البرهان

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overrightarrow{أد} = \frac{1}{2}\overrightarrow{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{أج}$ ∴ $\overrightarrow{أهـ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{أج}$

فى △ أبج (الكبير) $\overrightarrow{بج} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أج}$ (١)

فى △ أدهـ (الصغير) $\overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{دأ} + \overrightarrow{أهـ}$ (٢)

$\overrightarrow{دهـ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{بأ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{أج}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أج})$

∴ $\overrightarrow{دهـ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{بج}$

∴ $\overline{دهـ} // \overline{بج}$

، دهـ = $\frac{1}{2}$ بج #

مثال ٣

أ ب جـ د شبه منحرف فيه أد // ب جـ ، ب جـ = ٣ أد ، أد→ = م→ ، أب→ = ن→

(شكل: شبه المنحرف أ ب جـ د وقطراه يتقاطعان في س)

(١) عبر بدلالة م→ ، ن→ عن ب جـ→ ، أجـ→ ، ب د→ ، د جـ→

⇐ ب جـ→ = ٣ أد→ = ٣ م→

⇐ أجـ→ = أب→ + ب جـ→ = ن→ + ٣ م→

⇐ ب د→ = ب أ→ + أد→ = −ن→ + م→
= م→ − ن→

د جـ→ = د أ→ + أب→ + ب جـ→
= −م→ + ن→ + ٣م→ = ن→ + ٢م→

(٢) إذا كانت س ∈ ب د حيث د س = $\frac{1}{3}$ س ب فأثبت أن أ ، س ، جـ على استقامة واحدة.

الحل

∵ د س = $\frac{1}{3}$ س ب

∴ س ب = ٣ س د

، ∵ س ∈ ب د ∴ س ب→ = ٣ د س→

في △ ب جـ س

س جـ→ = س ب→ + ب جـ→
= ٣ س د→ + ٣ أد→

= ٣ (س د→ + أد→) = ٣ (أد→ + د س→)

= ٣ أ س→

∴ س جـ→ ، أ س→ لهما نفس الاتجاه ومشتركتان في س ∴ أ ، س ، جـ تقع على استقامة واحدة.

ملحوظة هامة

نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب جـ

أ(س١ ، ص١) ب(س٢ ، ص٢) جـ(س٣ ، ص٣)

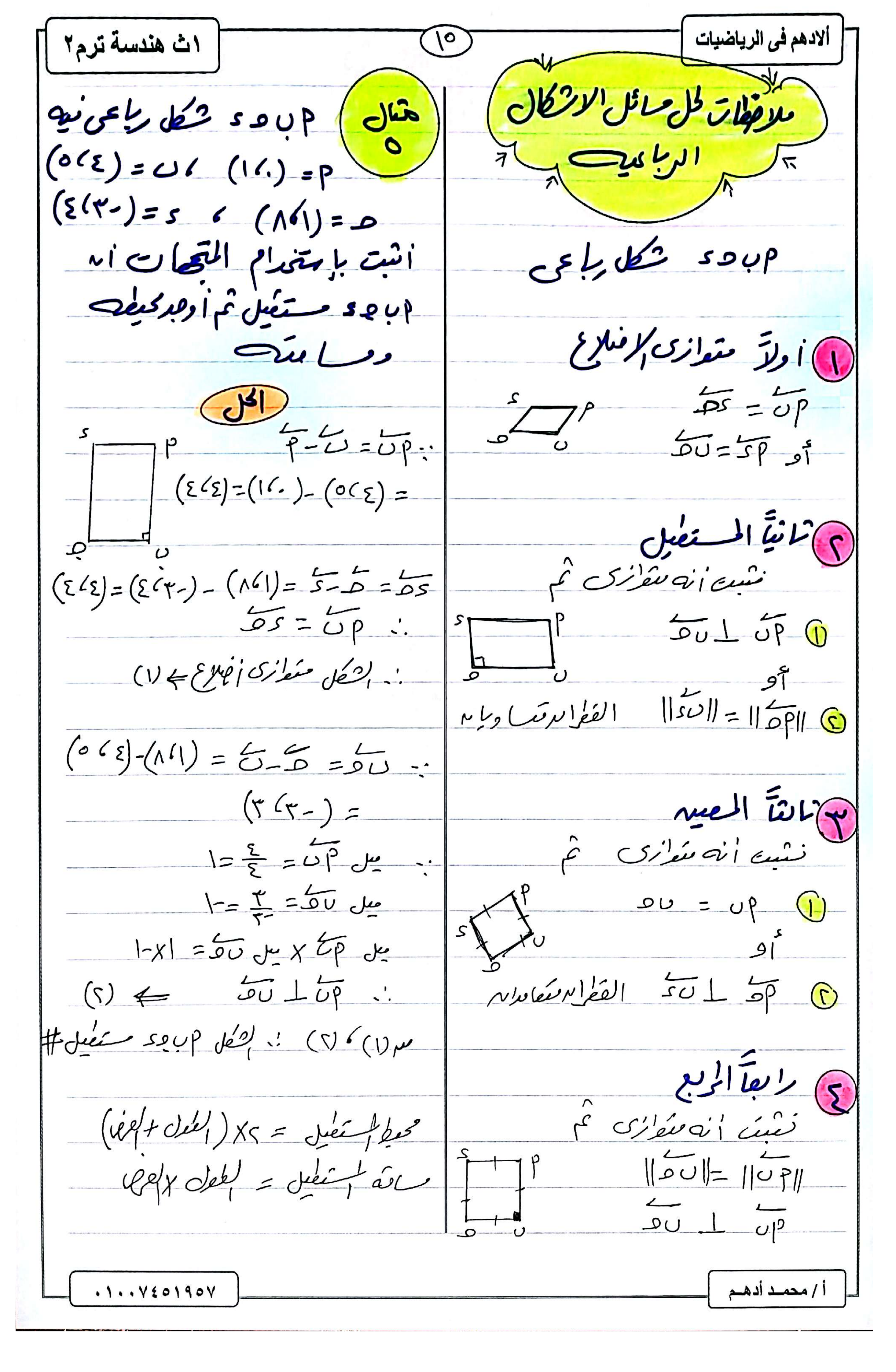
$= \left(\frac{س_1+س_2+س_3}{3} ، \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3} \right)$

مثال ٤

المثلث أ ب جـ رؤوسه أ(٢ ، ١) ، ب(١ ، ٥) جـ(٦ ، −٣) فإن نقطة تلاقي متوسطاته = ...

$= \left(\frac{2+1+6}{3} ، \frac{1+5-3}{3} \right)$

$= \left(\frac{9}{3} ، \frac{3}{3} \right) = (3 ، 1)$



ملاحظات لحل مسائل الأشكال الرباعية

أ ب جـ د شكل رباعي

١ أولاً متوازي الأضلاع

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{دجـ}$

أو $\overrightarrow{أد}$ = $\overrightarrow{بجـ}$

٢ ثانياً المستطيل

نثبت أنه متوازي ثم

(١) $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بجـ}$

أو

(٢) $\|\overrightarrow{أجـ}\| = \|\overrightarrow{بد}\|$ القطران متساويان

٣ ثالثاً المعين

نثبت أنه متوازي ثم

(١) أب = بجـ

أو

(٢) $\overrightarrow{أجـ} \perp \overrightarrow{بد}$ القطران متعامدان

٤ رابعاً المربع

نثبت أنه متوازي ثم

$\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{بجـ}\|$

$\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بجـ}$

مثال ٥

أ ب جـ د شكل رباعي فيه
أ = (٠ ، ١) ، ب = (٤ ، ٥)
جـ = (١ ، ٨) ، د = (-٣ ، ٤)
أثبت باستخدام المتجهات أن أ ب جـ د مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$
= (٤ ، ٥) − (٠ ، ١) = (٤ ، ٤)

$\overrightarrow{دجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{د}$ = (١ ، ٨) − (-٣ ، ٤) = (٤ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{دجـ}$

∴ الشكل متوازي أضلاع ← (١)

∵ $\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٨) − (٤ ، ٥)
= (-٣ ، ٣)

∵ ميل $\overrightarrow{أب}$ = ٤/٤ = ١
ميل $\overrightarrow{بجـ}$ = ٣/-٣ = -١
ميل $\overrightarrow{أب}$ × ميل $\overrightarrow{بجـ}$ = ١ × -١

∴ $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بجـ}$ ⇐ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل #

محيط المستطيل = ٢ × (الطول + العرض)
مساحة المستطيل = الطول × العرض

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٤^2+٤^2} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

$\|\overrightarrow{أد}\| = \sqrt{(-٣)^2+(٣)^2} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ محيط المستطيل $= ٢ \times (٤\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢})$

$= ٢ \times ٧\sqrt{٢} = ١٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، مساحة المستطيل $= ٤\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}$

$= ٢٤$ وحدة مربعة

مثال ٦

إذا كانت القوى [illegible]

$\overrightarrow{ق_١} = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ق_٢} = -٢\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ق_٣} = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحل

$\overrightarrow{ح} = (٥-٢+٣)\overrightarrow{س} + (٢+٧-١)\overrightarrow{ص}$

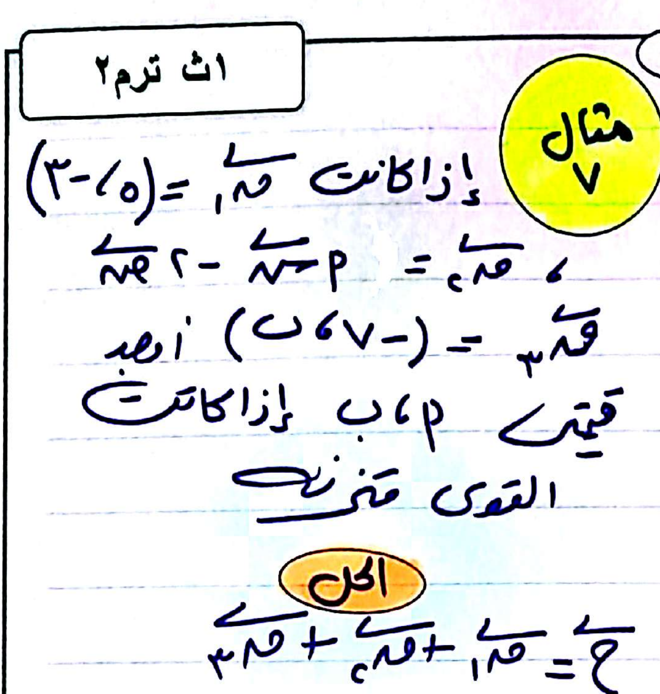
$= ٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$

المقدار $= \|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٦^2+٨^2}$

$= ١٠$ نيوتن

الاتجاه θ

$ظا θ = \frac{٨}{٦}$ ∴ $θ = ظا^{-1}(\frac{٨}{٦}) \simeq ٥٣°$



مثال ٧

إذا كانت $\overrightarrow{ق_١} = (٥، -٣)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = أ\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = (-٧، ب)$ أوجد قيمتي أ، ب إذا كانت القوى متزنة

الحل

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$

$\overrightarrow{ح} = (٥ + أ - ٧)\overrightarrow{س} + (-٣ - ٢ + ب)\overrightarrow{ص}$

∴ المجموعة متزنة

∴ المحصلة = ٠

$(-٢ + أ)\overrightarrow{س} + (-٥ + ب)\overrightarrow{ص} = ٠$

∴ $-٢ + أ = ٠ \Leftarrow أ = ٢$

$-٥ + ب = ٠ \Leftarrow ب = ٥$

مثال ٨

تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة ٦٠ كم/س. أوجد سرعة أ بالنسبة لـ (ب) إذا كانت

(١) السيارتان في اتجاه واحد.

(٢) السيارتان في اتجاهين متضادين.

الحل

(ى ، أ ، ب)

(١) $\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب}$

$= ٨٠\overrightarrow{ى} - ٦٠\overrightarrow{ى} = ٢٠\overrightarrow{ى}$

٢٠ كم/س

(٢) من اتجاهين متضادين

ع→أ = ٨٠ ي→

ع→ب = −٦٠ ي→

ع→أب = ع→أ − ع→ب

= ٨٠ − (−٦٠) = ١٤٠ ي→

‖ع→أب‖ = ١٤٠ كم/س

مثال ٩

أكمل

(١) إذا كانت ق→١ = س→ − ٣ص→ ، ق→٢ = ٣س→ − ص→

فإن مقيار القوة المحصلة = ...

(٢) إذا كانت ق→١ = (أ، ب)

، ق→٢ = −٣س→ + ٤ص→

وكانت المجموعة متزنة فإن

أ = ... ، ب = ...

(٣) إذا كان: ع→أ = ١٢٠ ي→

، ع→ب = −٨ ي→ فإن

ع→أب = ...

ع→بأ = ...

(٤) إذا كان ع→أب = ٧٥ ي→

، ع→أ = −٦٠ ي→ فإن

ع→بأ = ...

ع→ب = ...

---

(٥) إذا كانت القوى

ق→١ = ٢س→ + ٣ص→

ق→٢ = أس→ + ص→

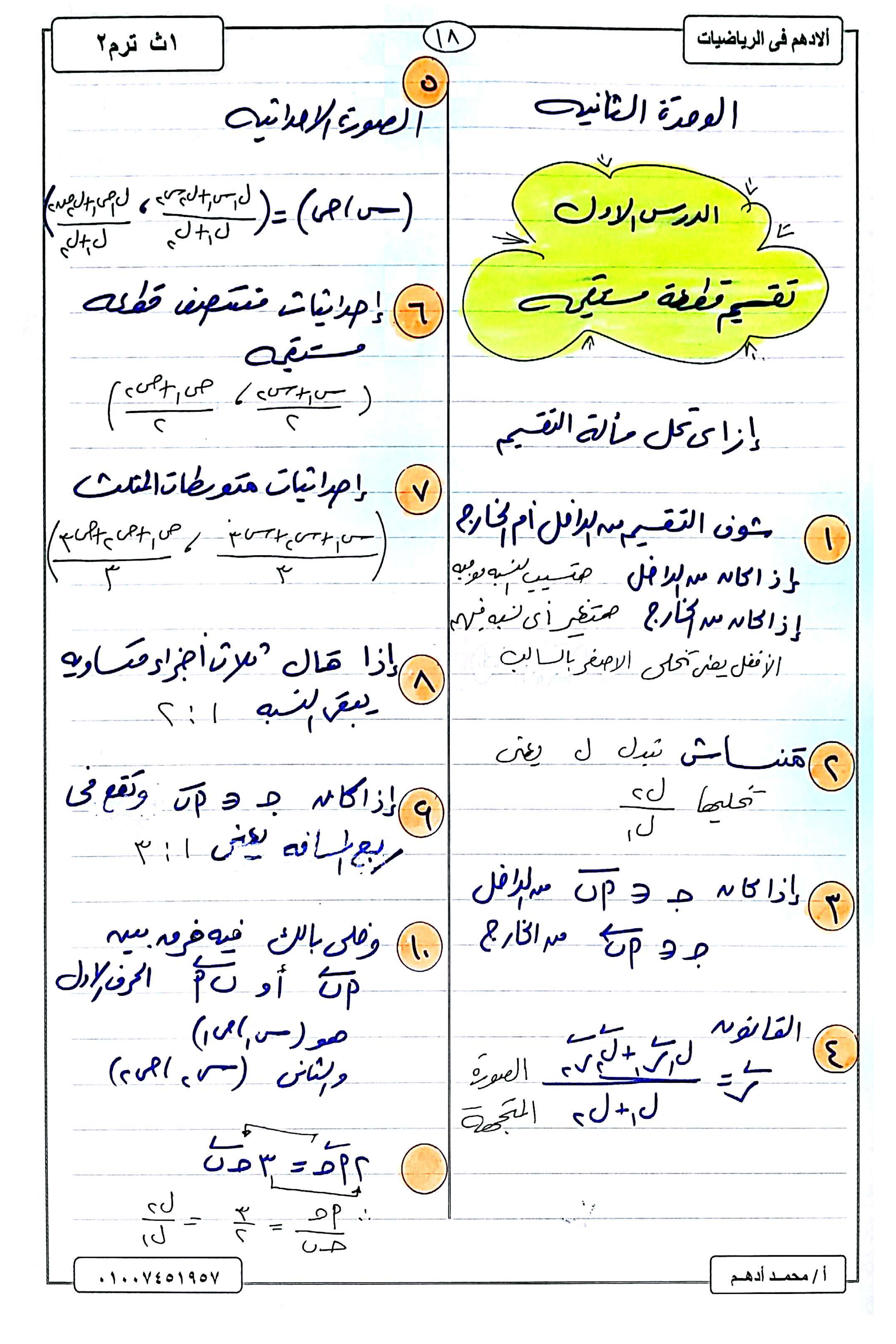
ق→٣ = ٥س→ + بص→

أوجد قيمتي أ، ب إذا كانت

(أ) المجموعة متزنة

(ب) المحصلة = ٥س→ − ٢ص→

(ج) المحصلة = ٣ص→



الوحدة الثانية

الدرس الاول

تقسيم قطعة مستقيمة

إزاى تحل مسألة التقسيم

١ شوف التقسيم من الداخل أم الخارج

إذا كان من الداخل هتسيب النسبة موجبة

إذا كان من الخارج هتغير أى نسبة فيهم

الأفضل يفضل تخلى الأصغر بالسالب

٢ متنساش تبدل ل يعنى تخليها $\frac{ل_2}{ل_1}$

٣ إذا كان جـ $\in \overline{أب}$ من الداخل

جـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ من الخارج

٤ القانون $\vec{ر} = \frac{ل_1 \vec{ر_2} + ل_2 \vec{ر_1}}{ل_1 + ل_2}$ الصورة المتجهة

٥ الصورة الاحداثية

$$(س ، ص) = \left(\frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2} ، \frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}\right)$$

٦ إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$$

٧ إحداثيات متوسطات المثلث

$$\left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3} ، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}\right)$$

٨ إذا قال ثلاثة أجزاء متساوية يبقى النسبة ١ : ٢

٩ إذا كان جـ $\in \overline{أب}$ وتقع فى ربع المسافة يعنى ١ : ٣

١٠ وخلى بالك فيه فرق بين $\overrightarrow{أب}$ أو $\overrightarrow{بأ}$ الحرف الاول

صو (س١ ، ص١)

والثانى (س٢ ، ص٢)

$$2\,\overrightarrow{أجـ} = 3\,\overrightarrow{جـب}$$

$$\frac{أجـ}{جـب} = \frac{3}{2} = \frac{ل_1}{ل_2}$$

مثال ١

إذا كانت أ = (١، -٤) ، ب = (٦، ٦) أوجد احداثي ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

الحل

∵ التقسيم من الداخل ∴ النسبة موجبة

$$\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{3}{2}$$

∴

ل١ = ٢ ، س١ = ١ ، ص١ = -٤

ل٢ = ٣ ، س٢ = ٦ ، ص٢ = ٦

$$(س، ص) = \left(\frac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2} ، \frac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2}\right)$$

$$(س، ص) = \left(\frac{2\times1 + 3\times6}{2+3} ، \frac{2\times-4 + 3\times6}{2+3}\right)$$

$$= \left(\frac{2+18}{5} ، \frac{-8+18}{5}\right)$$

∴ ج = (٤ ، ٢)

مثال ٢

إذا كانت : أ = (٢، -٣) ، ب = (١، -١) أوجد احداثي النقطة ج التي تقسم $\overline{بأ}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

الحل

خلي بالك من الترتيب

الأولى ← التقسيم من الخارج يعني $\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{-4}{3}$

الثانية ← قال $\overline{بأ}$

ب(س١، ص١) أ(س٢، ص٢)

ل١ = -٣ ، س١ = ١ ، ص١ = -١

ل٢ = ٤ ، س٢ = ٢ ، ص٢ = -٣

$$(س، ص) = \left(\frac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2} + \frac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2}\right)$$

$$(س، ص) = \left(\frac{-3\times1 + 4\times2}{-3+4} + \frac{-3\times-1 + 4\times-3}{-3+4}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{1} ، \frac{3-12}{1}\right)$$

∴ ج = (٥ ، -٩)

تدريب ١

إذا كانت أ = (٢، ٣) ، ب = (٦، -١) فأوجد احداثي ج التي تقع في ربع المسافة $\overline{أب}$

تدريب ٢

إذا كانت أ = (٢، ٥) ، ب (٧، -١) أوجد احداثي ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

مثال ٣

إذا كانت أ = (٣، ٦) ، ب = (-٧، ٤) فإن منتصف $\overline{أب}$ = (......، ......)

المنتصف = $\left(\frac{٣ - ٧}{٢} ، \frac{٦ + ٤}{٢}\right)$

= $\left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{١٠}{٢}\right)$ = (-٢، ٥)

(١) إذا كانت النقطة (٣، ٦) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ = (-٣، ٧) فإن نقطة ب = (......، ......)

(-٣، ٧) .... (س، ص)

أ ——— (٣، ٦) ——— ب

(٣، ٦) = $\left(\frac{-٣ + س}{٢} ، \frac{٧ + ص}{٢}\right)$

$\frac{-٣ + س}{٢}$ = ٣ | $\frac{٧ + ص}{٢}$ = ٦

-٣ + س = ٦ | ٧ + ص = ١٢

س = ٦ + ٣ = ٩ | ص = ١٢ - ٧ = ٥

∴ ب (٩، ٥)

مثال ٤

أ ب ج مثلث احداثيات رؤوسه (٠، ٨) ، (٣، ٢) ، (-٣، ٥) فإن نقطة تلاقي متوسطاته

= $\left(\frac{٠ + ٣ - ٣}{٣} ، \frac{٨ + ٢ + ٥}{٣}\right)$

= (٠، ٥)

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث أ = (٢، ٥) ، ب (٥، ٢) ، ج = (٤، ص) أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة ج القطعة المستقيمة الموجهة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص

الحل

نفرض أن التقسيم هو $\frac{ل_٢}{ل_١}$

∵ ج هي نقطة التقسيم

(٤، ص) = $\left(\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}\right)$

$\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$ = ٤

$\frac{٢ ل_١ + ٥ ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$ = ٤

٢ ل_١ + ٥ ل_٢ = ٤ ل_١ + ٤ ل_٢

٥ ل_٢ - ٤ ل_٢ = ٤ ل_١ - ٢ ل_١

ل_٢ = ٢ ل_١

$\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٢}{١}$ موجبة يعني من الداخل

∴ ص = $\frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٩}{٣}$ = ٣

مثال ٦

أوجد النسبة التي تنقسم بها $\overline{أب}$ بكل من نقطتي تقاطعها مع محوري الاحداثيات إذا كانت $أ = (٤ ، -٣)$ ، $ب = (-٣ ، ٥)$ ثم أوجد احداثيات نقط التقسيم

الحل

أولاً نقطة التقاطع مع محور السينات

هنخلي $ص = ٠$

يعني $(س ، ٠)$ وتساوي الاحداثي الصادي للتقسيم بـ صفر

$$\frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2} = ٠$$

$$\frac{-٣ل_1 + ٥ل_2}{ل_1 + ل_2} = ٠$$

$∴ -٣ل_1 + ٥ل_2 = ٠$

$-٣ل_1 = -٥ل_2$

$$\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{-٣}{-٥} = \frac{٣}{٥}$$

∴ التقسيم من الداخل بنسبة $\frac{٣}{٥}$

$$س = \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$$

$ل_1 = ٥$ ، $ل_2 = ٣$

$$س = \frac{٥ \times ٤ + ٣ \times -٣}{٥ + ٣} = \frac{١١}{٨}$$

∴ نقطة التقسيم هي $(\frac{١١}{٨} ، ٠)$

ثانياً نقطة التقاطع مع محور الصادات

$(٠ ، ص)$

$$\frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2} = ٠$$

$$\frac{٤ل_1 - ٣ل_2}{ل_1 + ل_2} = ٠$$

$∴ ٤ل_1 - ٣ل_2 = ٠$

$-٣ل_2 = -٤ل_1$

$$\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$$ ($ل_2 \leftarrow ٤$ ، $ل_1 \leftarrow ٣$)

∴ التقسيم من الداخل بنسبة ٤ : ٣

$$ص = \frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2} = \frac{٣ \times -٣ + ٤ \times ٥}{٣ + ٤} = \frac{١١}{٧}$$

∴ النقطة هي $(٠ ، \frac{١١}{٧})$

الدرس الثاني
معادلة الخط المستقيم

أولاً كيفية تعيين الميل

(١) $\overleftrightarrow{ل}$ يمر بـ (س١، ص١)، (س٢، ص٢)

الميل = فرق الصادات / فرق السينات = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١)

(٢) نقطة واحدة ∈ ل ، متجه اتجاه ى = (أ، ب)

الميل = ب / أ

(٣) معادلة ص = م س + جـ

إذا كانت ص لوحدها في اليمين يبقى الميل هو معامل س

مثلاً: ص = ٥س + ٢
⟵ الميل = ٥

ص = −٣س
⟵ الميل = −٣

ص = ٢ − س
⟵ الميل = −١

(٤) ص، س في طرف واحد

الميل = − معامل س / معامل ص

مثلاً:

٣س + ٢ص − ٥ = ٠

الميل = −٣ / ٢

٥ص − ٤س + ٣ = ٠

الميل = ٤ / ٥

(٥) ظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظاهـ

يصنع ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

م = ظا ٤٥ = ١

يصنع ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

م = ظا ١٣٥° = −١

* يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب **لمحور الصادات**

ص

ركز جداً ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات

يعني ٣٠ + ٩٠ = ١٢٠°

ظا ١٢٠° = −$\sqrt{3}$

٦ موازى لمستقيم معلوم

م١ = م٢

يعنى بنجيب ميل الاول وهيساوى ميل التانى

٧ عمودى على مستقيم معلوم

م١ × م٢ = -١

هنقلب الكسر ونغير الاشارة

يعنى $\frac{2}{3} \perp \frac{-3}{2}$

$\frac{-5}{6} \perp \frac{6}{5}$

$-2 \perp \frac{1}{2}$ وهكذا

٨ ميل الموازى لمحور السينات = صفر

وميل أى مستقيم أفقى = صفر

أو كسر بسطه = صفر

٩ ميل الموازى لمحور الصادات غير معرف = $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

وميل أى مستقيم رأسى غير معرف

١٠ العمودى على محور السينات هو الموازى لمحور الصادات "غير معرف"

١١ والعمودى على محور الصادات هو الموازى لمحور السينات "ميله = صفر"

ملحوظة هامة: لتكوين الصور المختلفة محتاجين نقطة ه ومتجه اتجاه

مثال ١: أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة ه = (٣، -٢) والمتجه ى = (-٢، ١) متجه إتجاه له

الحل

١- المعادلة المتجهة

ر = ه + ك ى

∴ ر = (٣، -٢) + ك (-٢، ١)

∴ (س، ص) = (٣، -٢) + ك (-٢، ١)

٢- المعادلتان الوسيطيتان [البارامتريتان]

س = ٣ - ٢ك ، ص = -٢ + ك

٣- المعادلة الكارتيزية (العامة)

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م ← الميل

$\frac{ص - (-٢)}{س - ٣} = \frac{١}{-٢}$

$\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{١}{-٢}$ طرفين ووسطين

$-٢(ص + ٢) = ١ \times (س - ٣)$

$-٢ص - ٤ = س - ٣$

$-٢ص - س - ٤ + ٣ = ٠$

$-٢ص - س - ١ = ٠$ $\times (-١)$ وبالترتيب

$س + ٢ص + ١ = ٠$

٢- المعادلتان البارامتريتان [البوسيطيتان]

$س = ٣ + ل$ ، $ص = -٥ + ل$

٣- المعادلة العامة [الكارتيزية]

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = $ الميل

$\frac{ص + ٥}{س - ٣} = ١$

$س - ٣ = ص + ٥$

$س - ص - ٣ - ٥ = ٠$

$س - ص - ٨ = ٠$

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، −٥) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

النقطة أ = (٣، −٥) ← $س_١$ ، $ص_١$

الميل = ظا ٤٥° = ١

لذلك متجه الاتجاه = (١، ١)

١- المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = أ + ل \vec{ى}$

$\vec{ر} = (٣، -٥) + ل (١، ١)$

$(س، ص) = (٣، -٥) + ل (١، ١)$

مثال ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين أ = (٣، −١) ، ب = (−٢، ٤)

الحل

أ = (٣، −١) ← $س_١$ ، $ص_١$

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ + ١}{-٢ - ٣} = \frac{٥}{-٥} = -١$

$\therefore \vec{ى} = (-١، ١)$

١- المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = أ + ل \vec{ى}$

$\vec{ر} = (٣، -١) + ل (-١، ١)$

٢- المعادلتان الوسيطيتان

س = ٣ - ك ، ص = ٣ + ك

٣- المعادلة الكارتيزية [العامة]

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$

$\frac{ص + ١}{س - ٣} = -١$

ص + ١ = - س + ٣

ص + س + ١ - ٣ = ٠

ص + س - ٢ = ٠

٢- المعادلتان البارامتريتان

٣- المعادلة الكارتيزية

ملحوظات

① معادلة محور الصادات ص = ٠

② معادلة محور الصادات س = ٠

③ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، -٣) موازي

لمحور السينات ص = -٣

لمحور الصادات س = ٢

④ معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣، -٤) موازياً

لمحور السينات ص = -٤

لمحور الصادات س = -٣

مثال ٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة ح (-٣، ٢) وعمودي على المتجه $\overrightarrow{ى} = (١، ٤)$

الحل

ح = (-٣، ٢)

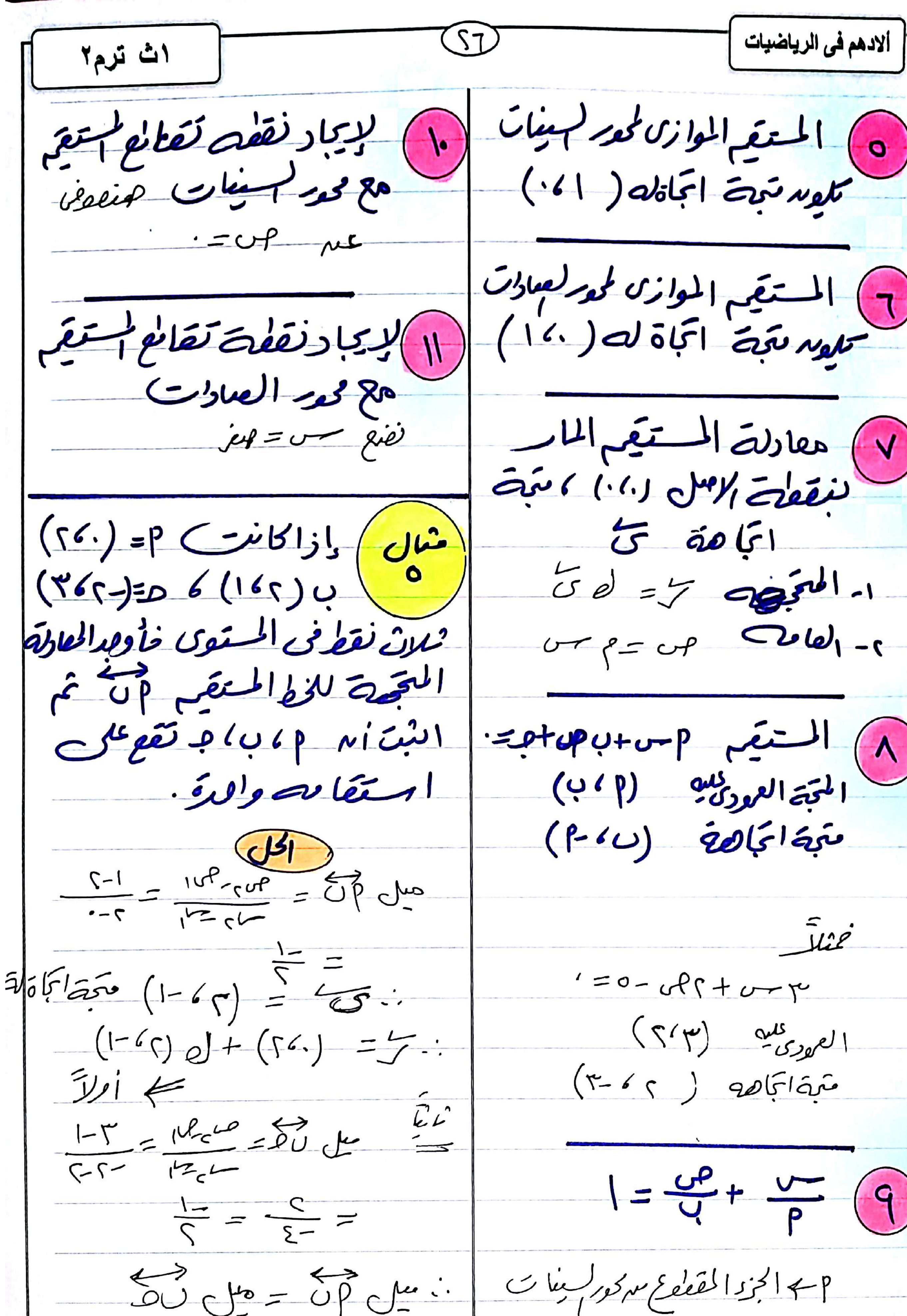
($س_1$ ، $ص_1$)

ى نبدل ونغير اشارة واحدة

$\overrightarrow{ى}$ = (٤ ، -١)

أكمل الحل

١- الصورة المتجهة



٥ المستقيم الموازي لمحور السينات يكون متجه اتجاهه (١، ٠)

٦ المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون متجه اتجاهه (٠، ١)

٧ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (٠، ٠) ومتجه اتجاهه ى

١- المتجهة: ر = ك ى

٢- العامة: ص = م س

٨ المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

المتجه العمودي عليه (أ، ب)

متجه اتجاهه (ب، -أ)

مثال

٣ س + ٢ ص - ٥ = ٠

العمودي عليه (٣، ٢)

متجه اتجاهه (٢، -٣)

٩ $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

أ ← الجزء المقطوع من محور السينات

ب ← الجزء المقطوع من محور الصادات

١٠ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠

١١ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = صفر

مثال ٥

إذا كانت أ = (٠، ٢)، ب (٢، ١)، جـ = (-٢، ٣) ثلاث نقط في المستوى فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم أب ثم أثبت أن أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة.

الحل

ميل أب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠}$

$= \frac{-١}{٢}$

∴ ى = (٢، -١) متجه اتجاه

∴ ر = (٠، ٢) + ك (٢، -١) ← أولاً

ثانياً

ميل ب جـ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{-٢ - ٢}$

$= \frac{٢}{-٤} = \frac{-١}{٢}$

∴ ميل أب = ميل ب جـ

∴ أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال ٦

$\overline{اب}$ قطر في دائرة مركزها م فإذا كان ب(-٧ ، ١١) ، م(-٢ ، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

الحل

نفرض أن أ (س ، ص)

ب(-٧ ، ١١) — م(-٢ ، ٣) — أ

فاكر إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

∴ ((س - ٧)/٢ ، (ص + ١١)/٢) = (-٢ ، ٣)

(س - ٧)/٢ = -٢	(ص + ١١)/٢ = ٣
س - ٧ = -٤	ص + ١١ = ٦
س = -٤ + ٧	ص = ٦ - ١١
س = ٣	ص = -٥

∴ أ (٣ ، -٥)

يبقى المماس بيمر بنقطة أ ، يكون عمودي على $\overline{اب}$ صح ؟

ميل $\overline{اب}$ = (١١ + ٥)/(-٧ - ٣) = ٨/-٥

هنقلب ونغير الإشارة عشان عمودي

∴ ميل المماس = ٥/٨

∴ معادلة المماس ← (ص - ص١)/(س - س١) = م

(ص + ٥)/(س - ٣) = ٥/٨

٨(ص + ٥) = ٥(س - ٣)

٨ص + ٤٠ = ٥س - ١٥

٥س - ١٥ - ٨ص - ٤٠ = ٠

∴ ٥س - ٨ص - ٥٥ = ٠

مثال ٧

إذا قطع المستقيم ٣س + ٤ص - ١٢ = ٠ محوري الإحداثيات في أ ، ب فأوجد

١) إحداثيات أ ، ب

٢) مساحة Δ و أ ب حيث و نقطة الأصل

الحل

١) ٣س/١٢ + ٤ص/١٢ = ١٢/١٢ بالقسمة على ١٢

س/٤ + ص/٣ = ١

تقطع محور السينات ٤ وحدات أ(٤ ، ٠)

ومحور الصادات ٣ وحدات ب(٠ ، ٣)

∴

ب ، ٣ ، و ، ٤ ، أ

٢) مساحة Δ و أ ب = ١/٢ × ٤ × ٣ = ٦ وحدة مربعة

مثال ٨

أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيم ٢س + ٣ص = ٦ ومحوري الإحداثيات





ظا هـ = $\left| \dfrac{م_1 - م_2}{1 + م_1 \times م_2} \right|$

ملاحظات

١) إذا كان الظل موجب فإننا نحصل على الزاوية الحادة.

٢) إذا كان ظا هـ = صفر فإن $م_1 = م_2$ يعني المستقيمان متوازيان أو منطبقان

٣) إذا كان ظا هـ غير معرف فإن قياس الزاوية بينهما = ٩٠° والمستقيمان متعامدان

٤) قياس الزاوية المنفرجة = ١٨٠ − الحادة

راجع كل قوانين الميل من الدرس السابق

مثال ١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين

$ل_1$: س − ٢ص + ٥ = ٠

$ل_2$: ٢س + ٤ص − ٧ = ٠

الحل

$م_1 = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

$م_2 = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

ظا هـ = $\left| \dfrac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} \right| = \left| \dfrac{\frac{1}{2} - (\frac{-1}{2})}{1 + (\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})} \right|$

$= \dfrac{4}{3}$

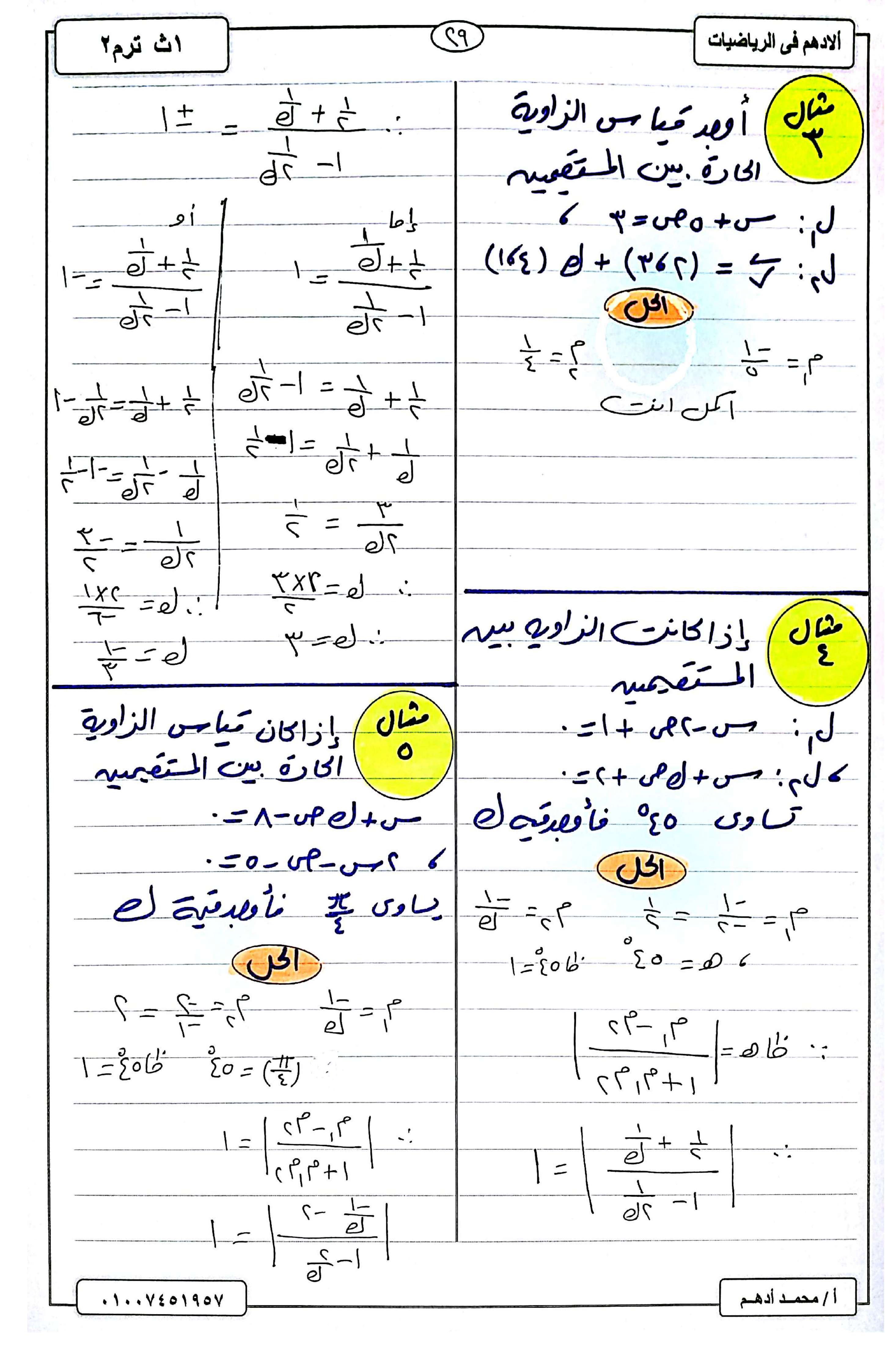
∴ هـ ≃ ٥٣° ٨َ

مثال ٢ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين

س − ٢ص + ٣ = ٠

والمار (١ ، −٤) ، (٢ ، ١)

الحل



مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين

ل١ : س + ٥ص = ٣ ،

ل٢ : ر = (٣،٢) + ك (١،٤)

الحل

م١ = $\frac{-1}{5}$ م٢ = $\frac{1}{4}$

أكمل انت

مثال ٤

إذا كانت الزاوية بين المستقيمين

ل١ : س − ٢ص + ١ = ٠

، ل٢ : س + ك ص + ٢ = ٠

تساوى ٤٥° فأوجد قيمة ك

الحل

م١ = $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ م٢ = $\frac{-1}{ك}$

، هـ = ٤٥° ظا ٤٥° = ١

∵ ظا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$

∵ $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}\right| = 1$

∴ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}} = \pm 1$

إما

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}} = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{ك} = 1 - \frac{1}{2ك}$

$\frac{1}{ك} + \frac{1}{2ك} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2ك} = \frac{1}{2}$

∴ $ك = \frac{3 \times 2}{2}$

∴ ك = ٣

أو

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}} = -1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{ك} = -1 + \frac{1}{2ك}$

$\frac{1}{ك} - \frac{1}{2ك} = -1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2ك} = \frac{-3}{2}$

∴ $ك = \frac{1 \times 2}{-6}$

$ك = \frac{-1}{3}$

مثال ٥

إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين

س + ك ص − ٨ = ٠

، ٢س − ص − ٥ = ٠

يساوى $\frac{\pi}{4}$ فأوجد قيمة ك

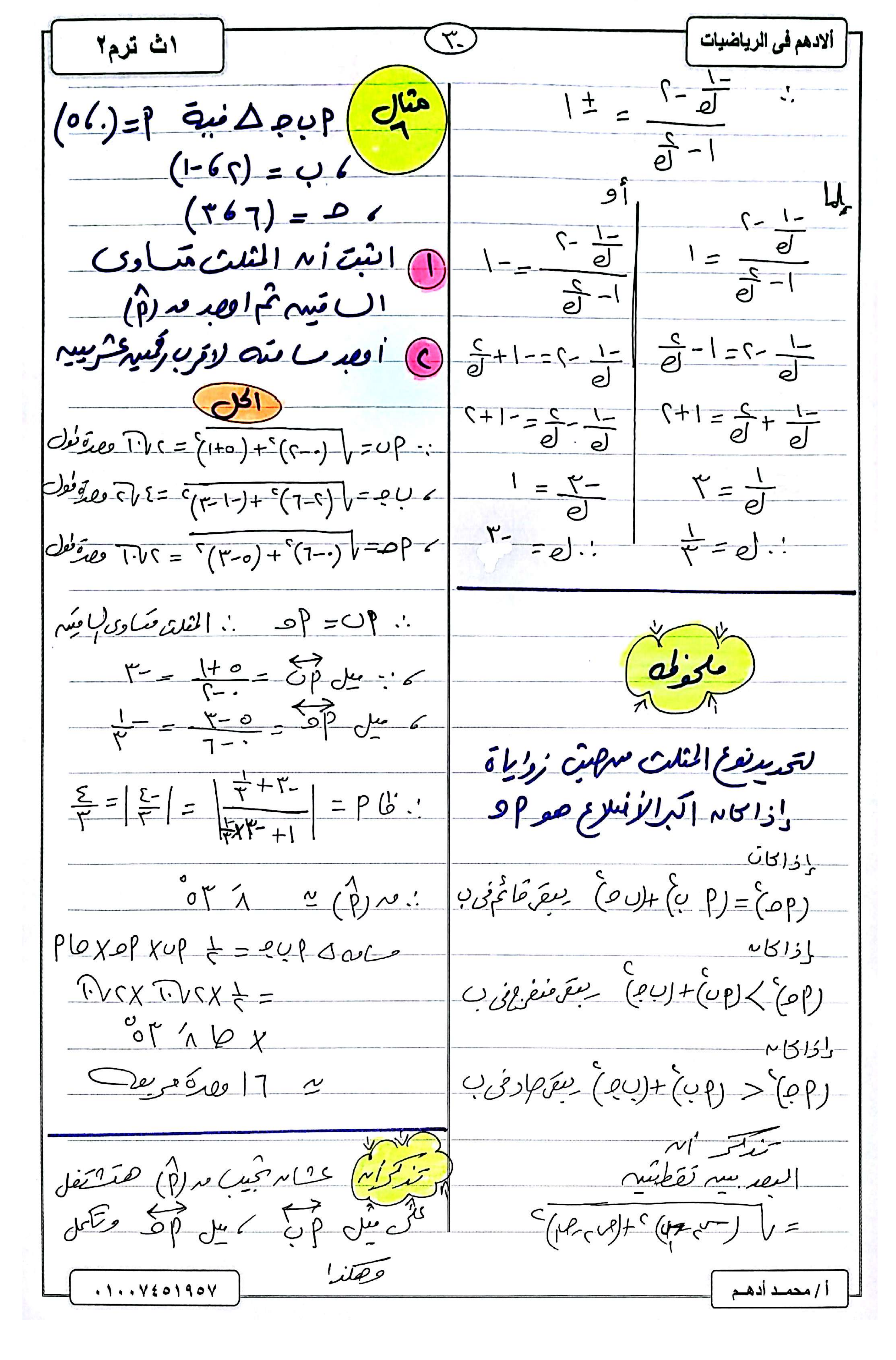
الحل

م١ = $\frac{-1}{ك}$ م٢ = $\frac{-2}{-1} = 2$

$(\frac{\pi}{4}) = 45°$ ظا ٤٥° = ١

∵ $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right| = 1$

$\left|\frac{\frac{-1}{ك} - 2}{1 - \frac{2}{ك}}\right| = 1$



∴ $\frac{\frac{1}{ك} - 2}{1 - \frac{2}{ك}} = \pm 1$

إما $\frac{\frac{1}{ك} - 2}{1 - \frac{2}{ك}} = 1$ أو $\frac{\frac{1}{ك} - 2}{1 - \frac{2}{ك}} = -1$

$\frac{1}{ك} - 2 = 1 - \frac{2}{ك}$ | $\frac{1}{ك} - 2 = -1 + \frac{2}{ك}$

$\frac{1}{ك} + \frac{2}{ك} = 1 + 2$ | $\frac{1}{ك} - \frac{2}{ك} = -1 + 2$

$\frac{1}{ك} = 3$ | $\frac{-3}{ك} = 1$

∴ $ك = \frac{1}{3}$ | ∴ $ك = -3$

مثال ٦

Δ أ ب جـ فيه أ = (٠، ٥) ، ب = (٢، −١) ، جـ = (٦، ٣)

١) اثبت أن المثلث متساوى الساقين ثم اوجد ق(∠أ)

٢) اوجد مساحته لأقرب رقمين عشريين

الحل

∵ أب = $\sqrt{(0-2)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$ وحدة طول

، ب جـ = $\sqrt{(2-6)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$ وحدة طول

، أجـ = $\sqrt{(0-6)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{10}$ وحدة طول

∵ أب = أجـ ∴ المثلث متساوى الساقين

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{5+1}{0-2} = -3$

، ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{5-3}{0-6} = -\frac{1}{3}$

∴ ظا أ = $\left|\frac{-3 + \frac{1}{3}}{1 + -3 \times -\frac{1}{3}}\right| = \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٣° ٨َ

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أب × أجـ × جا أ

= $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10}$ × جا ٥٣° ٨َ

≃ ١٦ وحدة مربعة

تذكر أن عشان تجيب ق(∠أ) هتشتغل كل ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ وتكمل وهكذا

ملحوظة

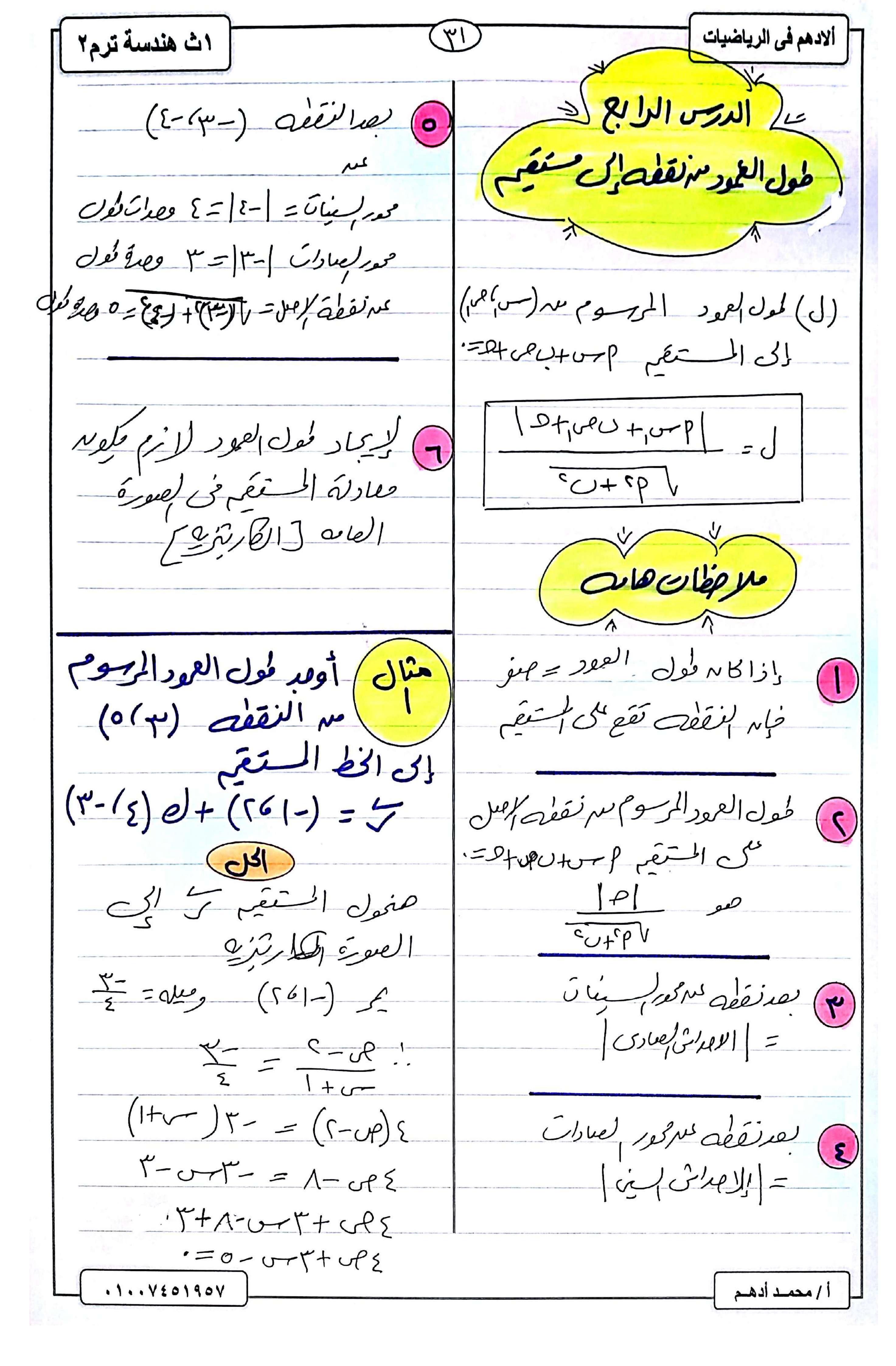
لتحديد نوع المثلث من حيث زواياه إذا كان أكبر الأضلاع هو أجـ

إذا كان $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$ يبقى قائم فى ب

إذا كان $(أجـ)^2 > (أب)^2 + (ب جـ)^2$ يبقى منفرج فى ب

إذا كان $(أجـ)^2 < (أب)^2 + (ب جـ)^2$ يبقى حاد فى ب

تذكر أن البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$



الدرس الرابع
طول العمود من نقطة إلى مستقيم

(ل) طول العمود المرسوم من $(س_1، ص_1)$ إلى المستقيم $أ س + ب ص + جـ = ٠$

$$ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

ملاحظات هامة

١) إذا كان طول العمود = صفر فإن النقطة تقع على المستقيم

٢) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم $أ س + ب ص + جـ = ٠$ هو $\frac{|جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

٣) بعد نقطة عن محور السينات = |الإحداثى الصادى|

٤) بعد نقطة عن محور الصادات = |الإحداثى السينى|

٥) بعد النقطة (-٣، -٤) عن

محور السينات = |-٤| = ٤ وحدات طول

محور الصادات = |-٣| = ٣ وحدة طول

عن نقطة الأصل = $\sqrt{(-٣)^2 + (-٤)^2}$ = ٥ وحدة طول

٦) لإيجاد طول العمود لازم تكون معادلة المستقيم فى الصورة العامة [الكارتيزية]

مثال ١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣، ٥) إلى الخط المستقيم

$ر = (-١، ٢) + ك (٤، -٣)$

الحل

نحول المستقيم ر إلى الصورة الكارتيزية

يمر (-١، ٢) وميله = $\frac{-٣}{٤}$

$\therefore \frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$

٤(ص - ٢) = -٣ (س + ١)

٤ص - ٨ = -٣س - ٣

٤ص + ٣س - ٨ + ٣ = ٠

٤ص + ٣س - ٥ = ٠

∴ العمود المرسوم من (٣، ٥)

الى ٣س + ٤ص − ٥ = ٠

$$= \frac{|٣ \times (٣) + ٤ \times (٥) - ٥|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$$

= ٤,٨ وحدة طول

∴ طول العمود ل = $\frac{|٣ \times ١ + ٤ \times ٥ - ٣|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

= $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤ وحدة طول

مثال ٢

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ء = (١، ٥) على المستقيم الواصل بين النقطتين (٥، −٣) ، (١، ٠)

الحل

معادلة المستقيم ص

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \text{الميل}$$

$$∴ \frac{ص + ٣}{س - ٥} = \frac{٠ + ٣}{١ - ٥}$$

$$\frac{ص + ٣}{س - ٥} = \frac{٣}{-٤}$$

٣(س − ٥) = −٤(ص + ٣)

٣س − ١٥ = −٤ص − ١٢

٣س + ٤ص − ١٥ + ١٢ = ٠

٣س + ٤ص − ٣ = ٠

مثال ٣

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣، ١) على المستقيم ٣س − ٤ص + ء = ٠ يساوى ٢ وحدة طول فأوجد قيمة ء

الحل

∴ ل = $\frac{|٣ \times ٣ - ٤ \times ١ + ء|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = ٢

∴ $\frac{|٩ - ٤ + ء|}{٥}$ = ٢

∴ |٥ + ء| = ١٠

∴ ٥ + ء = ± ١٠

إما ٥ + ء = ١٠ ، ء = ١٠ − ٥ ، ∴ ء = ٥

أو ٥ + ء = −١٠ ، ء = −١٠ − ٥ ، ء = −١٥

مثال ٤

إثبت أن المستقيمان ل١ : س − ٢ص + ١١ = ٠ ، ل٢ : ٢س − ٤ص + ٧ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما.

الحل

ميل الأول $م_١ = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

ميل الثاني $م_٢ = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

∵ الميلان متساويان

∴ المستقيمان متوازيان

بوضع س = ١ أو أى قيمة في المعادلة الأولى

∴ ١ − ٢ص + ١١ = ٠

−٢ص + ١٢ = ٠

−٢ص = −١٢ ∴ ص = $\frac{-١٢}{-٢}$ = ٦

∴ النقطة (١، ٦) ∈ ل١

نجيب البعد بينها وبين ل٢

∴ طول العمود المرسوم من (١، ٦) على المستقيم ٢س − ٤ص + ٧ = ٠

$= \frac{|٢ × ١ − ٤ × ٦ + ٧|}{\sqrt{٢^٢ + ٤^٢}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$ وحدة طول

مثال ٥

أوجد مساحة الدائرة التي مركزها م (١، ٢) ويمسها المستقيم الذي معادلته ٦س + ٨ص − ٢ = ٠

(ط = ٣٫١٤)

الحل

∵ المماس يكون عمودي على نصف القطر من نقطة التماس

يبقى هنجيب بعد المركز عن المستقيم ٦س + ٨ص − ٢ = ٠

ويكون هو طول نق

∴ نق = $\frac{|٦ × ١ + ٨ × ٢ − ٢|}{\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}}$ = ٢ وحدة طول

∴ مساحة الدائرة = ط نق²

= ٣٫١٤ × (٢)² = ١٢٫٥٦ وحدة مربعة

مثال ٦

اثبت أن النقطتين أ (٣، ١) ، ب (−٣، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم ل : ٣س − ٤ص + ٦ = ٠

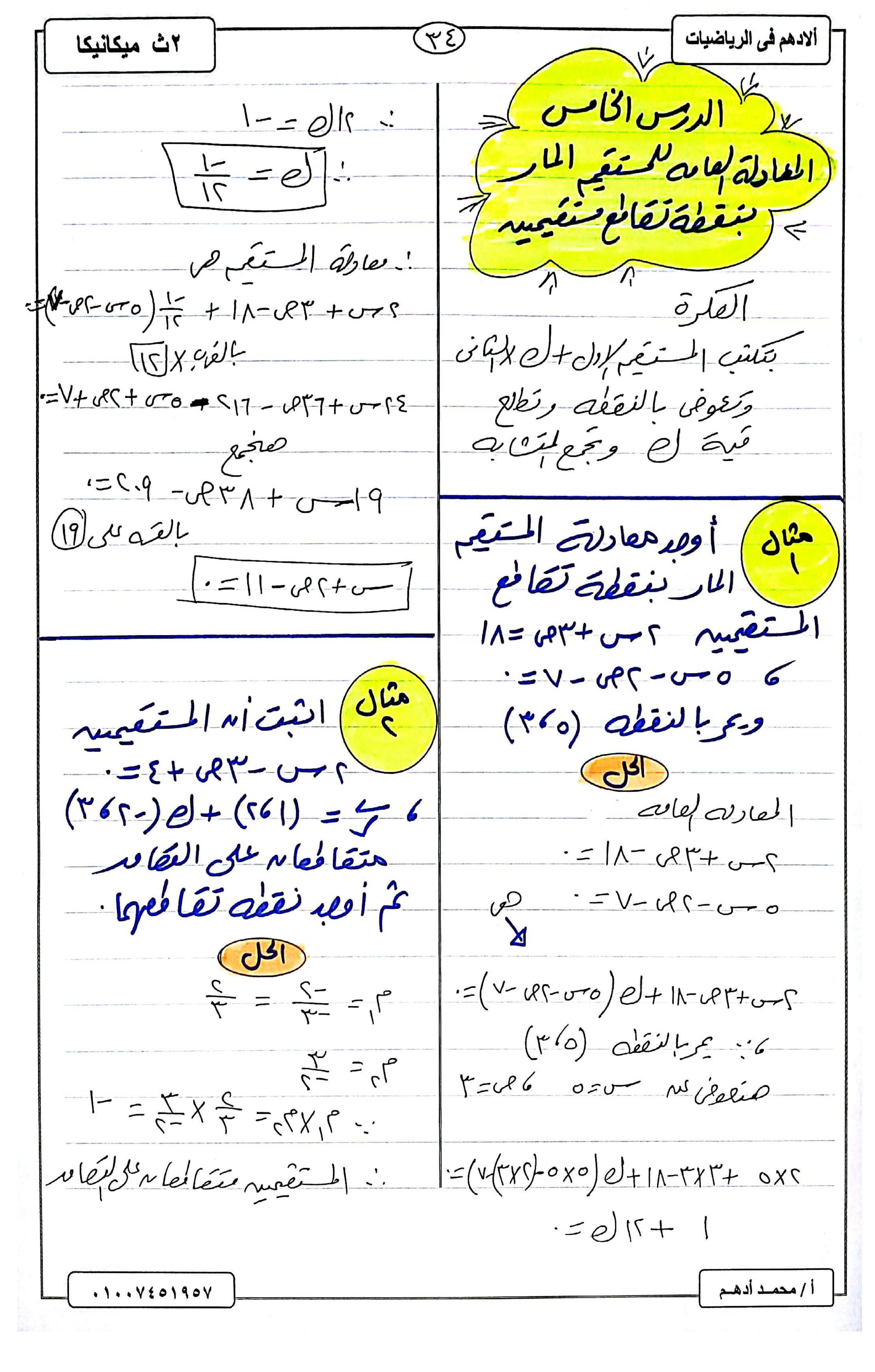
الحل

العمود الأول = $\frac{|٣ × ٣ − ٤ × ١ + ٦|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{|١١|}{٥}$

العمود الثاني = $\frac{|٣ × (−٣) − (٤ × ٢) + ٦|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{|-١١|}{٥}$

∴ الإشارتان مختلفتان

∴ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين



الدرس الخامس
المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

الفكرة

بنكتب المستقيم الأول + ل الثاني ونعوض بالنقطة ونطلع قيمة ل ونجمع المتشابه

مثال ١

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ٣ص = ١٨ ، ٥س − ٢ص − ٧ = ٠ ويمر بالنقطة (٥ ، ٣)

الحل

المعادلة العامة

٢س + ٣ص − ١٨ = ٠

٥س − ٢ص − ٧ = ٠

٢س + ٣ص − ١٨ + ل (٥س − ٢ص − ٧) = ٠

∵ يمر بالنقطة (٥ ، ٣)

هنعوض بـ س = ٥ ، ص = ٣

٢×٥ + ٣×٣ − ١٨ + ل (٥×٥ − (٢×٣) − ٧) = ٠

١ + ١٢ل = ٠

∴ ١٢ل = −١

∴ ل = −١/١٢

∴ معادلة المستقيم هي

٢س + ٣ص − ١٨ + (−١/١٢) (٥س − ٢ص − ٧) = ٠

بالضرب × ١٢

٢٤س + ٣٦ص − ٢١٦ − ٥س + ٢ص + ٧ = ٠

هنجمع

١٩س + ٣٨ص − ٢٠٩ = ٠

بالقسمة على ١٩

س + ٢ص − ١١ = ٠

مثال ٢

اثبت أن المستقيمين ٢س − ٣ص + ٤ = ٠ ، ر = (١ ، ٢) + ك (−٢ ، ٣) متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

م١ = −٢/−٣ = ٢/٣

م٢ = −٣/٢

∵ م١ × م٢ = ٢/٣ × −٣/٢ = −١

∴ المستقيمين متقاطعان على التعامد

المعادلة الكارتيزية للمستقيم الثاني

هي $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{-٣}{٢}$

$٢(\text{ص} - ٢) = -٣(\text{س} - ١)$

$٢\text{ص} - ٤ = -٣\text{س} + ٣$

$٣\text{س} + ٢\text{ص} - ٤ - ٣ = ٠$

$٣\text{س} + ٢\text{ص} - ٧ = ٠$

∴ المعادلتان

$٢\text{س} - ٣\text{ص} = -٤ \leftarrow (١)$

$٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٧ \leftarrow (٢)$

بضرب الأولى × ٢ والثانية × ٣

$٤\text{س} - ٦\text{ص} = -٨$

$٩\text{س} + ٦\text{ص} = ٢١$

$١٣\text{س} = ١٣$

∴ $\text{س} = ١$

بالتعويض في (١)

$٢ - ٣\text{ص} = -٤$

$-٣\text{ص} = -٤ - ٢$

$-٣\text{ص} = -٦$

$\text{ص} = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

∴ نقطة التقاطع (١، ٢)

انتهى المنهج بفضل الله

مع أطيب وأرق تمنياتي

القلبية بالنجاح والتفوق

م/ محمد أدهم